Jean-Marie Dufour
17 avril 2007

Université de Montréal
ECN 6238
Économétrie des séries chronologiques
Examen final

Aucune documentation permise
Calculatrice permise
Durée : 3 heures

10 points — 1. Soit le processus

$$X_t = \sum_{j=1}^{m} [A_j \cos(\nu_j t) + B_j \sin(\nu_j t)] \ , \ t \in \mathbb{Z} \ ,$$

où $\nu_1, \ldots , \nu_m$ sont des constantes distinctes dans l'intervalle $[0, 2\pi)$ et $A_j, B_j, j = 1, \ldots , m$, sont des $v.a.'s$ dans L_2 , telles que

$$\begin{aligned} E(A_j) &= E(B_j) = 0 \ , \ E(A_j^2) = E(B_j^2) = \sigma_j^2 \ , \ j = 1, \ldots , n \ , \\ E(A_j A_k) &= E(B_j B_k) = 0, \ \text{pour } j \neq k \ , \\ E(A_j B_k) &= 0, \ \forall j, \ k \ . \end{aligned}$$

(a) Démontrez que ce processus est stationnaire d'ordre 2.

(b) Pour le cas où $m = 1$, démontrez que ce processus est déterministe.

25 points — 2. Considérez le processus suivant, où $\{u_t : t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc $i.i.d.$ $N(0, 1)$:

$$X_t = 0.5 \ X_{t-1} + u_t - 0.25 \ u_{t-1}$$

Répondez aux questions suivantes :

(a) Ce processus est-il stationnaire ? Pourquoi ?

(b) Ce processus est-il inversible ? Pourquoi ?

(c) Quels sont les coefficients de u_t, u_{t-1}, u_{t-2}, u_{t-3} et u_{t-4} dans la représentation moyenne mobile de X_t.

(d) Donnez la densité spectrale de X_t.

(e) Si $X_t = 1$, $X_{t-1} = 0.5$, $X_{t-2} = -1$ et $u_{t-1} = 0$, calculez les meilleures prévisions (au sens de l'erreur quadratique moyenne) de $X_{t+1},$ X_{t+2} et X_{t+3}.

15 points 3. Considérez le modèle décrit par les hypothèses suivantes :

(1) $Y_t = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j Y_{t-j} + u_t\,, \quad t = p+1,\, \ldots\,,\, T\,;$

(2) $\{u_t : t = 1,\, \ldots\,,\, T\} \sim IID(0,\, \sigma^2)\,;$

(3) le polynôme $\varphi(z) = 1 - \varphi_1 z - \varphi_1 z^2 - \cdots - \varphi_p z^p$ a toutes ses racines sur le cercle unité sauf possiblement une qui peut être égale à 1.

Décrivez une procédure qui permet de tester l'hypothèse que le polynôme $\varphi(z)$ a une racine sur le cercle unité.

40 points 4. Soit $\{(X_t,\, Y_t) : t \in \mathbb{Z}\}$ un processus stationnaire au sens large strictement non déterministe.

(a) Que veut-on dire par l'expression “stationnaire au sens large” ?

(b) Qu'implique le théorème de Wold multivarié pour ce processus ?

(c) Que veut dire l'expression “strictement non déterministe” ?

(d) Expliquez les expressions suivantes :

i. X cause Y ;

ii. Y cause X instantanément ;

iii. il y a rétroaction entre X et Y.

(e) Si on dit que $(X_t,\, Y_t)$ suit un processus ARMA, qu'est-ce que cela signifie ?

(f) En supposant que $(X_t,\, Y_t)$ possède une représentation autorégressive, donnez une caractérisation de la relation $X \nrightarrow Y$:

i. à partir de la représentation autorégressive du processus $(X_t,\, Y_t)$;

ii. à partir de la représentation moyenne mobile du processus $(X_t,\, Y_t)$;

iii. à partir des représentations univariées des processus X_t et Y_t.

(g) Décrivez une méthode permettant de tester l'hypothèse que les processus X et Y sont indépendants entre eux.

(h) Décrivez une méthode permettant de tester l'hypothèse que X cause Y au sens de Granger.

10 points 5. Décrivez l 'approche de Tiao et Box (JASA, 1981) pour l 'identification et l'estimation de modèles ARMA multivariés. En particulier, soyez certain(e) de préciser :

(a) la classe de modèles utilisés ;

(b) la méthode employée pour identifier l'ordre d'un processus MA ;

(c) la méthode employée pour identifier l'ordre d'un processus AR ;

(d) l'approche employée pour l'estimation et la validation du modèle.