Fonctions de transfert *

Jean-Marie Dufour †
Université de Montréal

Première version: Octobre 2000
Révisions: Avril 2003
Cette version: 11 avril 2003
Compilé: 11 avril 2003, 10:45pm

*Cette recherche a bénéficié du support financier de la Chaire de recherche du Canada en économétrie, du Conseil des Arts du Canada (Bourse Killam), du Conseil de recherche en sciences humaines du Canada, du Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada, de la Fondation Alexander von Humboldt (Allemagne), de l'Institut de Finance mathématique de de Montréal (IFM2), du Réseau canadien de centres d'excellence (projet MITACS) et du Fonds FCAR du Québec.

† L'auteur est titulaire de la Chaire de recherche du Canada en économétrie. Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO), Centre interuniversitaire de recherche en économie quantitative (CIREQ) et Département de sciences économiques, Université de Montréal. Adresse postale: Département de sciences économiques, Université de Montréal, C.P. 6128 succursale Centre Ville, Montréal, Québec, Canada H3C 3J7. TEL: (514) 343 2400; FAX: (514) 343 5831; courriel: jean.marie.dufour@umontreal.ca. Page Web: http://www.fas.umontreal.ca/SCECO/Dufour .

Table des matières

1. Le modèle de fonction de transfert **1**

2. Identification et estimation de fonctions de transfert **1**

2.1. Méthode de Box-Jenkins 2

2.2. Méthode de Haugh-Box 3

2.3. Validation 5

3. Modèle d'intervention **5**

4. Notes bibliographiques **7**

1. Le modèle de fonction de transfert

Considérons un système à deux variables (X_t, Y_t) SSL avec moyenne zéro, où il y a causalité unidirectionnelle de X vers Y. Alors on peut écrire :

$$C(B)\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ u_t \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

où

$$C(B) = \begin{bmatrix} C_{11}(B) & 0 \\ C_{21}(B) & C_{22}(B) \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

où $\{\varepsilon_t\}$ et $\{u_t\}$ sont des bruits blancs et $\mathsf{E}(\varepsilon_t u_s) = 0, \ \forall t, \ s$. Il s'ensuit que

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = C(B)^{-1}\begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ u_t \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

où

$$C(B)^{-1} = \begin{bmatrix} C^{11}(B) & 0 \\ C^{21}(B) & C^{22}(B) \end{bmatrix}, \tag{1.4}$$

ce qui permet d'écrire

$$X_t = C^{11}(B)\,\varepsilon_t\,, \tag{1.5}$$
$$Y_t = C^{21}(B)\,\varepsilon_t + C^{22}(B)\,u_t\,. \tag{1.6}$$

Si on suppose que $C^{11}(B)^{-1}$ existe,

$$\begin{aligned} Y_t &= C^{21}(B)\,C^{11}(B)^{-1}X_t + C^{22}(B)\,u_t \\ &= V(B)\,X_t + N_t \end{aligned} \tag{1.7}$$

où

$$V(B) = C^{21}(B)\,C^{11}(B)^{-1}\,, \tag{1.8}$$
$$N_t = C^{22}(B)\,u_t = \frac{\theta(B)}{\varphi(B)}u_t\,. \tag{1.9}$$

2. Identification et estimation de fonctions de transfert

2.1 Problème *Déterminer la forme de*

$$V(B) = V_0 + V_1 B + V_2 B^2 + \cdots \tag{2.1}$$

et de $\frac{\theta(B)}{\varphi(B)}$.

2.1. Méthode de Box-Jenkins

On pourrait en principe examiner l'intercorrélogramme entre X_t et Y_t,

$$\hat{\rho}\left(X_t,\, Y_{t+k}\right)\ , \tag{2.2}$$

lequel est lié de façon complexe à $V_0, V_1, V_2, \ldots$ Il est plus simple de préblanchir X_t et Y_t :

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= C^{11}\left(B\right)^{-1} X_t\,, &(2.3)\\ Y_t &= V\left(B\right) X_t + N_t &(2.4) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \gamma_{\varepsilon W}\left(k\right) &\equiv \mathsf{E}\left[\varepsilon_{t-k} W_t\right] \\ &= V_k \mathsf{E}\left[\varepsilon_{t-k}\varepsilon_{t-k}\right] \\ &= V_k \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

et

$$\begin{aligned} W_t &\equiv C^{11}\left(B\right)^{-1} Y_t \\ &= V\left(B\right) C^{11}\left(B\right)^{-1} X_t + C^{11}\left(B\right)^{-1} N_t \\ &= V\left(B\right) \varepsilon_t + C^{11}\left(B\right)^{-1} N_t\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} V_k &= \gamma_{\varepsilon W}\left(k\right)/\sigma_\varepsilon^2 \\ &= \rho_{\varepsilon W}\left(k\right) \frac{\sigma_\varepsilon \sigma_W}{\sigma_\varepsilon^2} \\ &= \rho_{\varepsilon W}\left(k\right) \frac{\sigma_W}{\sigma_\varepsilon} \end{aligned} \tag{2.7}$$

que l'on peut estimer par

$$\hat{V}_k = r_{\varepsilon W}\left(k\right) \frac{\hat{\sigma}_W}{\hat{\sigma}_\varepsilon} \tag{2.8}$$

avec

$$r_{\varepsilon W} = \left(\sum \hat{\varepsilon}_{t-k} \hat{W}_t\right) / \left[\left(\sum \hat{\varepsilon}_t^2\right)\left(\sum \hat{W}_t^2\right)\right]^{1/2}\ . \tag{2.9}$$

En général, on cherche deux polynômes de degrés finis $W(B)$ et $\delta(B)$ tels que

$$V(B) = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \; . \tag{2.10}$$

2.2 Exemple

$$\begin{aligned} \omega(B) &= \omega_0 \, , & (2.11)\\ \delta(B) &= 1 - \delta_1 B \, , & (2.12)\\ V(B) &= \omega_0 \left[1 + \delta_1 B + \delta_1^2 B^2 + \cdots\right] \; . & (2.13) \end{aligned}$$

En résolvant les équations

$$\hat{V}(B)\,\hat{\delta}(B) = \hat{\omega}(B) \tag{2.14}$$

on obtient des estimés préliminaires $\hat{\delta}(B)$ et $\hat{\omega}(B)$. Une fois qu'on a une estimation préliminaire $\hat{V}(B)$, on peut calculer des résidus estimés :

$$\hat{N}_t = Y_t - \hat{V}(B)\,X_t \; . \tag{2.15}$$

On identifie un modèle pour N_t de la façon habituelle :

$$\hat{N}_t = \frac{\theta(B)}{\varphi(B)}\hat{u}_t \; . \tag{2.16}$$

Une fois $\frac{\omega(B)}{\delta(B)} = V(B)$ et $\frac{\theta(B)}{\varphi(B)}$ identifiés, on peut estimer le modèle par maximum de vraisemblance.

2.2. Méthode de Haugh-Box

Haugh et Box (1977) ont proposé une autre méthode pour identifier la structure d'un modèle de fonction de transfert. Partant du modèle

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} &= C(B)^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ u_t \end{bmatrix} & (2.17)\\ &= \begin{bmatrix} C^{11}(B) & 0 \\ C^{21}(B) & C^{22}(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ u_t \end{bmatrix} & (2.18) \end{aligned}$$

où $\{\varepsilon_t\}$ et $\{u_t\}$ sont des bruits blancs et $\mathsf{E}(\varepsilon_t u_s) = 0, \; \forall t, \, s$, on voit que

$$X_t = C^{11}(B)\,\varepsilon_t \, , \tag{2.19}$$

$$Y_t \;=\; C^{21}(B)\,\varepsilon_t + C^{22}(B)\,u_t\,. \tag{2.20}$$

Chacun des processus univariés X_t et Y_t possède une représentation MA :

$$X_t = V_{X_1}(B)\,U_{1t}\,,\; U_{1t} \sim BB\,, \tag{2.21}$$

$$Y_t = V_{X_2}(B)\,U_{2t}\,,\; U_{2t} \sim BB\,. \tag{2.22}$$

Les innovations univariées U_{1t} et U_{2t} sont elles-mêmes des fonctions de ε_t et u_t. En tenant compte de la causalité unidirectionelle de X vers Y, on peut alors écrire :

$$\begin{bmatrix} U_{1t} \\ U_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(B) & 0 \\ W_{21}(B) & W_{22}(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ u_t \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

ou, de façon équivalente

$$\begin{aligned} U_{1t} &= W_{11}(B)\,\varepsilon_t\,, \\ U_{2t} &= W_{21}(B)\,\varepsilon_t + W_{22}(B)\,u_t\,, \end{aligned} \tag{2.24}$$

ce qui signifie que

$$U_{1t} = \varepsilon_t\,,\; W_{11}(B) = 1\,, \tag{2.25}$$

et

$$\begin{aligned} U_{2t} &= W_{21}(B)\,\varepsilon_t + W_{22}(B)\,u_t \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} V_k' U_{1,t-k} + W_{22}(B)\,u_t\,, \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\rho\,(U_{2t}, U_{1,t-k}) = V_k' \sigma_{U_1}^2\,. \tag{2.27}$$

La fonction de transfert qui relie X à Y a donc la forme :

$$\begin{aligned} Y_t &= V_{X_2}(B)\,W_{21}(B)\,V_{X_1}(B)^{-1}\,X_t + V_{22}(B)\,u_t \\ &= V(B)\,X_t + N_t\,, \end{aligned} \tag{2.28}$$

où

$$V(B) = V_{X_2}(B)\,W_{21}(B)\,V_{X_1}(B)^{-1}\,. \tag{2.29}$$

La dernière formule fournit une manière facile d'obtenir $V(B)$.

2.3. Validation

Si la forme du modèle estimé est correcte

$$Y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} X_t + \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} u_t\,, \tag{2.30}$$

où

$$\begin{aligned} \theta(B) &: \text{polynôme de degré } q\,, \\ \varphi(B) &: \text{polynôme de degré } p\,, \\ \omega(B) &: \text{polynôme de degré } r\,, \\ \delta(B) &: \text{polynôme de degré } s\,, \\ n &= \text{taille d'échantillon}\,, \end{aligned}$$

on s'attend à ce que :

1. les résidus $\hat{u}_t$ constituent un bruit blanc ;
2. les résidus $\hat{\varepsilon}_t$ et $\hat{u}_t$ soient non-corrélés à tous les délais avec pour distributions asymptotiques (sous H_0)

$$\sqrt{n}\, r_{\hat{u}\hat{u}}(k) \sim N(0,\, 1)\,, \tag{2.31}$$

$$\sqrt{n}\, r_{\hat{\varepsilon}\hat{u}}(k) \sim N(0,\, 1)\,, \tag{2.32}$$

   sous H_0, et

$$Q = n \sum_{k=1}^{K} r_{\hat{u}\hat{u}}^2(k) \sim \chi^2(K - p - q)\,, \tag{2.33}$$

$$S = n \sum_{k=0}^{K} r_{\hat{\varepsilon}\hat{u}}^2(k) \sim \chi^2(K - r - s)\,. \tag{2.34}$$

3. Modèle d'intervention

Soit $\{Y_t\}$ une série « normalement » stationnaire :

$$Y_t = \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} a_t\,. \tag{3.1}$$

Il peut arriver qu'un événement spécial (e.g. une intervention politique) vienne modifier le comportement de Y_t [Tiao et Box (1981)].

3.1 Exemple Contrôle de prix et salaires sur l'indice des prix à la consommation.

3.2 Exemple Réglementation anti-pollution sur le niveau de pollution dans une ville.

Une telle intervention modifie le caractère stationnaire de la série.

3.3 Problème *Modéliser l'intervention et vérifier si elle paraît avoir un effet.*

Une façon générale de ce faire [proposée par Tiao et Box (1981)] consiste à considérer un modèle de la forme :

$$y_t = f(\kappa,\, \xi_t,\, t) + N_t \tag{3.2}$$

où

$$\begin{aligned} N_t &= \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} a_t \,, & (3.3) \\ y_t &= f(Y_t) \,, & (3.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\kappa,\, \xi_t,\, t) &: \text{ fonction déterministe,} \\ \xi_t &: \text{ variables exogènes,} \\ \kappa &: \text{ vecteur de paramètres,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(B) &= \varphi_1(B)\,\varphi_2(B^s)\,(1-B)^d\,(1-B^s)^D \,, & (3.5) \\ \theta(B) &= \theta_1(B)\,\theta_2(B^s) \,. & (3.6) \end{aligned}$$

Pour modéliser des ≪ interventions ≫ nous allons considérer des fonctions $f(\cdot)$ de la forme :

$$\begin{aligned} g(w,\, \delta,\, \xi_t,\, t) &= \sum_{j=1}^{k} Y_{tj} \\ &= \sum_{j=1}^{k} \frac{\omega_j(B)}{\delta_j(B)} \xi_{tj} & (3.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_j(B) &= \omega_{j0} - \omega_{j1}B - \cdots - \omega_{js_j}B^{s_j} \,, & (3.8) \\ \delta_j(B) &= 1 - \delta_{j1}B - \cdots - \delta_{jr_j}B^{r_j} \,. & (3.9) \end{aligned}$$

On considère habituellement deux types de variables d'intervention :

1. variable escalier :

$$S_t^{(T)} = \begin{cases} 0\,, & t < T\,, \\ 1\,, & t \geq T\,, \end{cases} \tag{3.10}$$

2. variable impulsion :

$$P_t^{(T)} = \begin{cases} 0 \,, & t \neq T \,, \\ 1 \,, & t = T \,. \end{cases} \tag{3.11}$$

On notera que

$$(1 - B)\, S_t^{(T)} = S_t^{(T)} - S_{t-1}^{(T)} = P_t^{(T)} \,. \tag{3.12}$$

3.4 Exemple Graphiques

4. Notes bibliographiques

Le lecteur trouvera plus de détails sur les tests de causalité dans Box et Jenkins (1976), Tiao et Box (1981) et Vandaele (1983).

4.1 Exemple **Références**

Box, G. E. P. et Jenkins, G. M. (1976), *Time Series Analysis : Forecasting and Control*, second edn, Holden-Day, San Francisco.

Haugh, L. D. et Box, G. E. P. (1977), 'Identification of dynamic regression (distributed lag) models connecting two time series', *Journal of the American Statistical Association* **72**, 121–130.

Tiao, G. C. et Box, G. E. P. (1981), 'Modeling multiple time series with applications', *Journal of the American Statistical Association* **76**, 802–816.

Vandaele, W. (1983), *Applied Time Series and Box-Jenkins Models*, Academic Press, New York.