

Méthodes d'inférence exactes pour des processus autorégressifs : une approche fondée sur des tests induits *

Jean-Marie Dufour[†]
Université de Montréal

Malika Neifar[‡]
Institut Supérieur de Gestion de Sousse

Première version : juillet 1997
Révisions : août 2000, août 2001
Cette version : octobre 2001
Compilé : 3 août 2003, 10:40am

Ce texte a été publié dans *L'Actualité économique*, vol. 78, no. 1 (mars 2002), 19-40.
This paper was published in *L'Actualité économique*, vol. 78, no. 1 (mars 2002), 19-40.

* Cette recherche a bénéficié du support financier de la Chaire de recherche du Canada en économétrie, du Conseil des Arts du Canada (Bourse Killam), du Conseil de recherche en sciences humaines du Canada, du Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada, de la Fondation Alexander von Humboldt (Allemagne), de l'Institut de Finance mathématique de de Montréal (IFM2), du Réseau canadien de centres d'excellence (projet MITACS), du Fonds de recherche sur la société et la culture (Québec), et du Fonds de recherche sur la nature et les technologies (Québec). Cette recherche a aussi été réalisée dans le cadre du programme d'analyse et de recherches économiques appliquées au développement international (PARADI), financé par l'Agence canadienne de développement international (ACDI) à titre de centre d'excellence et relevant du Centre de recherche et développement en économie (C.R.D.E) et l'Université de Montréal. Les auteurs remercient un arbitre anonyme ainsi que l'éditeur adjoint Denis Bolduc pour leurs commentaires.

[†] L'auteur est titulaire de la Chaire de recherche du Canada en économétrie. Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO), Centre interuniversitaire de recherche en économie quantitative (CIREQ) et Département de sciences économiques, Université de Montréal. Adresse postale: Département de sciences économiques, Université de Montréal, C.P. 6128 succursale Centre Ville, Montréal, Québec, Canada H3C 3J7. TEL: (514) 343 2400; FAX: (514) 343 5831; courriel: jean.marie.dufour@umontreal.ca. Page Web: <http://www.fas.umontreal.ca/SCECO/Dufour> .

[‡] Institut Supérieur de Gestion de Sousse, C.P.763, Sousse 4000, Tunisie.
Courriel : malika.neifar@isgs.rnu.tn .

RÉSUMÉ

Dans ce texte, nous considérons un modèle autorégressif d'ordre p (où $p \geq 1$) gaussien, possiblement non stationnaire, avec un terme constant (tendance). Nous développons des méthodes d'inférence exactes pour les coefficients de ce modèle. Nous proposons une méthode qui permet de tester n'importe quelle hypothèse qui fixe le vecteur complet des coefficients autorégressifs du modèle, puis en « inversant » ces tests, de construire une région de confiance conjointe pour les coefficients du vecteur. Chaque hypothèse est testée en transformant d'abord les observations de façon à faire disparaître toute autocorrélation sous l'hypothèse nulle puis en testant si les observations transformées sont indépendantes. Pour ce faire, nous combinons plusieurs tests d'autocorrélation conçus pour détecter la dépendance aux délais $1, 2, \dots, p$. La méthode proposée permet de construire de façon simple les régions de confiance en résolvant $2p$ polynômes de second degré pour chaque coefficient (après un balayage des $p - 1$ coefficients restants du modèle et pour chaque configuration de ces $p - 1$ coefficients). Pour faire de l'inférence sur les coefficients individuels du modèle ou sur des transformations plus générales des coefficients autorégressifs, nous proposons d'utiliser une technique de projection. Nous appliquons la méthode développée à un modèle du P.I.B. réel tunisien.

Mots-clés : série chronologique ; processus autorégressif ; inférence exacte ; test ; région de confiance ; test induit ; combinaison de tests.

ABSTRACT

In this paper, we consider a gaussian autoregressive model of order p , which may be nonstationary and includes a drift term (where $p \geq 1$). Exact inference methods are developed for the autoregressive coefficients. We consider first the problem of testing any hypothesis that fixes the vector of the autoregressive coefficients. This is done by first transforming the observations in a way that eliminates serial dependence under the null hypothesis, and then testing whether autocorrelation remains present in the transformed data. The latter task is accomplished by combining several independence tests against serial correlation at lags $1, 2, \dots, p$. A valid confidence region for the autoregressive coefficients may then be obtained by inverting the latter tests. We show that this confidence region can be built numerically on solving $2p$ polynomials of order 2, where in each case $p - 1$ autoregressive coefficients are fixed, and then using a grid search over the latter $p - 1$ coefficients. For inference on individual coefficients or more general transformations of the autoregressive coefficients, we propose the use of a projection approach. The proposed method is applied to a time series model of real G.D.P. in Tunisia.

Keywords : time series ; autoregressive process ; exact inference ; test ; confidence region.

Table des matières

1. Introduction	1
2. Modèle et notations	2
3. Test de l'hypothèse $H_0(\theta_0) : \theta = \theta_0$	3
4. Région de confiance pour θ	5
4.1. Processus autorégressif d'ordre 1	5
4.2. Processus autorégressif d'ordre 2	6
4.3. Processus autorégressif général	8
5. Tests d'hypothèses générales	9
6. Application au P.I.B. réel tunisien	11
7. Conclusion	13
A. Annexe: Données et autocorrélations	17

Table des figures

1	Aucorrélations du logarithme du P.I.B. tunisien (1961-1992)	14
2	Aucorrélations partielles du logarithme du P.I.B. tunisien (1961-1992)	14
3	Région de confiance exacte de niveau 0.95 pour les coefficients du modèle AR(2) du P.I.B. tunisien (1961-1992)	15
4	Région de confiance exacte agrandie de niveau 0.95 pour les coefficients du modèle AR(2) du P.I.B. tunisien (1961-1992)	16

Liste des tableaux

1	Données sur le P.I.B. réel tunisien, 1961-1992	17
2	Autocorrélations et autocorrélations partielles du logarithme du P.I.B. réel tunisien, 1961-1992	18

1. Introduction

L'inférence statistique (tests et régions de confiance) sur des modèles autorégressifs constitue l'un des problèmes fondamentaux posé par l'analyse des séries chronologiques en économétrie et en statistique. Les méthodes utilisées pour ce faire sont habituellement basées sur des approximations asymptotiques dont la fiabilité est généralement douteuse, même sous des hypothèses paramétriques précises (e.g., innovations gaussiennes). Ainsi les niveaux réels des tests peuvent différer de façon arbitrairement grande de ceux affichés par les approximations de grands échantillons [voir Blough (1992), Cochrane (1991), Dufour (1997), Staiger et Stock (1997)]. C'est le cas en particulier, lorsque le processus considéré est d'un ordre plus grand que un ; voir, par exemple, Diebold et Nerlove (1990), Gouriéroux et Monfort (1990), Brockwell et Davis (1991), Stock (1991, 1994) et Hamilton (1994). Il n'y a aucune garantie que ces méthodes sont "valides en échantillon fini".

Dans ce texte, nous développons des méthodes d'inférence exactes relativement simples qui permettent de réaliser des tests et de construire des régions de confiance sur les coefficients d'un processus autorégressif d'ordre p [AR(p)] gaussien contenant un paramètre constant inconnu. Il n'y a pas de contrainte sur la stationnarité du processus. Nous allons principalement nous intéresser au problème de la construction de régions de confiance pour les paramètres du modèle. La méthode générale développée est une extension de l'approche décrite dans Dufour (1990) pour des processus AR(1).

L'approche proposée comporte deux étapes principales. La première consiste à obtenir un test qui permet de vérifier n'importe quelle hypothèse fixant le vecteur complet des coefficients du processus autorégressif. La distribution de chaque statistique proposée ne comporte pas de paramètres de nuisance. Chaque hypothèse de ce type est testée en transformant les observations de façon à faire disparaître l'autocorrélation entre celles-ci sous l'hypothèse nulle _ dépendance qui ne disparaît pas sous la contre-hypothèse _ et en testant si les observations transformées sont indépendantes. En outre, pour traiter les cas où $p \geq 2$, nous proposons un test induit qui combine plusieurs tests d'autocorrélation conçus pour détecter la dépendance aux délais $1, 2, \dots, p$.¹

Cette méthode a l'avantage de simplifier considérablement le calcul des distributions des statistiques sous l'hypothèse nulle et de permettre l'utilisation de tables, comme celles fournies par Vinod (1973, Table IIa). Typiquement, les valeurs critiques appropriées peuvent être calculées au moyen de l'algorithme d'Imhof (1961) ou d'algorithmes semblables [e.g., Ansley, Shively et Kohn (1992)]. La seconde étape consiste à construire une région de confiance conjointe pour les coefficients du modèle. Cette dernière est obtenue en cherchant l'ensemble des vecteurs de coefficients autorégressifs qui ne sont pas rejetés par la procédure de test développée plus haut. En d'autres termes, on "inverse" la famille de tests considérée. On peut ainsi calculer de façon simple les régions de confiance. En effet, pour le cas AR(1), la région de confiance se calcule facilement en résolvant deux polynômes du second degré. Pour les processus d'ordre plus élevé ($p \geq 2$), on peut avoir recours à un balayage sur $p - 1$ coefficients du modèle : pour chaque configuration de ces $p - 1$ coefficients, on obtient l'ensemble des valeurs acceptables du dernier paramètre (qui peut être vide) en résolvant $2p$ polynômes du second degré. La région de confiance conjointe est alors l'union des

¹Pour des survols de la théorie des tests induits et de l'inférence simultanée, le lecteur pourra consulter Miller (1981) et Savin (1984).

“régions conditionnelles” ainsi obtenues.

À partir de la région de confiance conjointe, on peut construire des intervalles de confiance pour les coefficients individuels du modèle par une méthode de projection, et tester toute genre d’hypothèse, linéaire ou non linéaire, sur les coefficients du modèle. Ces intervalles de confiance et les tests ainsi obtenus possèdent aussi une propriété de simultanité, telle que définie dans la littérature statistique sur l’inférence simultanée [voir Miller (1981), Savin (1984)] : la probabilité que les vraies valeurs de tous les paramètres considérés soient simultanément couvertes par ces intervalles est au moins égale au niveau affiché [95% par exemple]. Cette propriété sera définie de façon plus formelle à la section 5. Dans le cas d’intervalles de confiance non simultanés, cette probabilité est typiquement inférieure au niveau. Les méthodes proposées sont appliquées à un modèle du produit intérieur brut (P.I.B.) réel tunisien.

Notre texte est divisé comme suit. Après avoir décrit le modèle et les principales notations utilisées dans la section 2, nous montrons à la section 3 comment construire un test combiné des paramètres du modèle autorégressif. Dans la section 4, nous discutons comment construire une région de confiance conjointe pour les coefficients du modèle, en considérant d’abord en détail les cas AR(1) et AR(2). Dans la section 5, nous étudions comment construire des régions de confiance pour les coefficients individuels du modèle et comment tester diverses hypothèses sur ces coefficients. Dans la section 6, nous appliquons les méthodes proposées à un modèle du P.I.B. réel tunisien. Nous concluons à la section 7.

2. Modèle et notations

Nous étudions ici le modèle AR(p) :

$$y_t = \beta_1 + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \cdots + \varphi_p y_{t-p} + u_t, \quad (2.1)$$

$$u_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N[0, \sigma^2], \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.2)$$

où $y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}$ sont indépendants de $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_T)'$, $T \geq p + 1$ et les paramètres $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, \beta_1$ et σ^2 sont inconnus. Afin de faciliter l’interprétation des résultats, il sera utile de reparamétriser le modèle de manière analogue à Dickey (1976), Fuller (1976) et Beveridge et Nelson (1981). On voit facilement que

$$\begin{aligned} y_t &= \beta_1 + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \cdots + \varphi_p y_{t-p} + u_t \\ &= \beta_1 + (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_p) y_{t-1} - (\varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_p)(y_{t-1} - y_{t-2}) \\ &\quad - (\varphi_3 + \varphi_4 + \cdots + \varphi_p)(y_{t-2} - y_{t-3}) + \cdots + (-\varphi_p)(y_{t-p+1} - y_{t-p}) + u_t \\ &= \beta_1 + \left(\sum_{j=1}^p \varphi_j \right) y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \left(- \sum_{i=j+1}^p \varphi_i \right) [y_{t-j} - y_{t-(j+1)}] + u_t, \quad t = 1, \dots, T, \end{aligned}$$

ou encore

$$y_t = \beta_1 + \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 (y_{t-1} - y_{t-2}) + \cdots + \theta_p (y_{t-(p-1)} - y_{t-p}) + u_t$$

$$\begin{aligned}
&= \beta_1 + \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 \Delta y_{t-1} + \cdots + \theta_p \Delta y_{t-p+1} + u_t \\
&= \beta_1 + \theta_1 y_{t-1} + \sum_{j=2}^p \theta_j \Delta y_{t-j+1} + u_t, \quad t = 1, \dots, T,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

où $\theta_1 = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_p$, $\theta_j = -\sum_{i=j}^p \varphi_i$, $\Delta y_{t-j} = y_{t-j} - y_{t-(j+1)}$, $j \geq 2$. Les paramètres inconnus du modèle transformé (2.3) sont donc $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$, β_1 et σ , tandis que les variables explicatives sont $y_{t-1}, \Delta y_{t-1}, \dots, \Delta y_{t-p+1}$. Les équations (2.1) et (2.3) sont complètement équivalentes.

3. Test de l'hypothèse $H_0(\boldsymbol{\theta}_0) : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$

Nous allons maintenant étudier le problème qui consiste à tester une hypothèse de la forme

$$H_0(\boldsymbol{\theta}_0) : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad \text{contre} \quad H_a(\boldsymbol{\theta}_0) : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0. \tag{3.1}$$

Nous dénotons par $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$ le vecteur des vraies valeurs de ces paramètres et par $\boldsymbol{\theta}_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}, \dots, \theta_{p0})'$ n'importe quel vecteur hypothétique de ces valeurs. Sous $H_0(\boldsymbol{\theta}_0)$,

$$y_t - \theta_{10} y_{t-1} - \theta_{20} \Delta y_{t-1} - \cdots - \theta_{p0} \Delta y_{t-p+1} = \beta_1 + u_t, \quad t = 1, \dots, T. \tag{3.2}$$

Si on définit

$$z_t(\boldsymbol{\theta}) = y_t - \theta_1 y_{t-1} - \theta_2 \Delta y_{t-1} - \cdots - \theta_p \Delta y_{t-p+1}, \quad t = 1, \dots, T, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}) = [z_1(\boldsymbol{\theta}), z_2(\boldsymbol{\theta}), \dots, z_T(\boldsymbol{\theta})]', \tag{3.4}$$

on voit que, sous $H_0(\boldsymbol{\theta}_0)$, la série $\{z_t(\boldsymbol{\theta}_0) : t = 1, \dots, T\}$ est un bruit blanc normal de moyenne β_1 . Sous la contre-hypothèse $H_a(\boldsymbol{\theta}_0)$, la même série sera autocorrélée et suivra un processus ARMA(p, p). On peut donc tester $H_0(\boldsymbol{\theta}_0)$ en testant si les variables $z_t(\boldsymbol{\theta}_0)$, $t = 1, \dots, T$, sont mutuellement indépendantes contre la présence d'autocorrélation aux délais 1, 2, \dots , p ; voir Neifar (1996). Comme la structure d'autocorrélation d'un processus ARMA(p, p) est complètement déterminée par les p premières autocorrélations, il sera suffisant de tester l'indépendance des $z_t(\boldsymbol{\theta}_0)$, $t = 1, \dots, T$, contre la présence d'autocorrélation aux délais 1, 2, \dots , p . Pour ce faire, nous allons utiliser p statistiques de la forme suivante :

$$D_j(\boldsymbol{\theta}_0) = \frac{\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}_0)' \overline{\mathbf{A}}_j \mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}_0)}{\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}_0)' \overline{\mathbf{B}}_j \mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}_0)}, \quad j = 1, \dots, p, \tag{3.5}$$

où $\overline{\mathbf{A}}_j = \mathbf{M} \mathbf{A}_j \mathbf{M}$, $\overline{\mathbf{B}}_j = \mathbf{M} \mathbf{B}_j \mathbf{M}$, $\mathbf{M} = \mathbf{I}_T - \frac{1}{T} \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu}'$, $\boldsymbol{\nu} = (1, 1, \dots, 1)'$ et \mathbf{B}_j est une matrice positive définie. L'expression $D_j(\boldsymbol{\theta}_0)$ dans (3.5) représente la forme générale de la plupart des statistiques d'autocorrélation usuelles, sauf que le test est ici appliqué au modèle transformé (de façon à éliminer la dépendance sérielle) en utilisant les valeurs des coefficients spécifiées par l'hypothèse nulle ($\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$). Sans perte de généralité, on peut supposer que \mathbf{A}_j et \mathbf{B}_j (et donc $\overline{\mathbf{A}}_j$ et $\overline{\mathbf{B}}_j$) sont des

matrices symétriques. L'intérêt de considérer de telles statistiques vient du fait que la distribution de chacune d'elles, sous $H_0(\boldsymbol{\theta}_0)$, ne dépend d'aucun paramètre de nuisance et peut être calculée assez facilement [par exemple, par l'algorithme d'Imhof (1961)]. En particulier, on peut considérer :

1. des statistiques de von Neumann généralisées

$$VN_j(\boldsymbol{\theta}_0) = \frac{T}{T-j} \frac{\sum_{t=1}^{T-j} [z_{t+j}(\boldsymbol{\theta}_0) - z_t(\boldsymbol{\theta}_0)]^2}{\sum_{t=1}^T [z_t(\boldsymbol{\theta}_0) - \bar{z}(\boldsymbol{\theta}_0)]^2}, \quad j = 1, \dots, p, \quad (3.6)$$

$$\text{où } \bar{z}(\boldsymbol{\theta}_0) = \sum_{t=1}^T z_t(\boldsymbol{\theta}_0)/T;$$

2. les coefficients d'autocorrélation

$$r_j(\boldsymbol{\theta}_0) = \frac{\sum_{t=1}^{T-j} [z_t(\boldsymbol{\theta}_0) - \bar{z}(\boldsymbol{\theta}_0)][z_{t+j}(\boldsymbol{\theta}_0) - \bar{z}(\boldsymbol{\theta}_0)]}{\sum_{t=1}^T [z_t(\boldsymbol{\theta}_0) - \bar{z}(\boldsymbol{\theta}_0)]^2}, \quad j = 1, \dots, p; \quad (3.7)$$

3. des statistiques de Durbin-Watson généralisées

$$d_j(\boldsymbol{\theta}_0) = \frac{\sum_{t=1}^{T-j} [z_{t+j}(\boldsymbol{\theta}_0) - z_t(\boldsymbol{\theta}_0)]^2}{\sum_{t=1}^T [z_t(\boldsymbol{\theta}_0) - \bar{z}(\boldsymbol{\theta}_0)]^2} = \frac{T-j}{T} VN_j(\boldsymbol{\theta}_0), \quad j = 1, \dots, p. \quad (3.8)$$

Il est facile de voir que toutes ces statistiques s'écrivent sous la forme (3.5).²

Un test bilatéral de niveau α_j pour l'hypothèse $H_0(\boldsymbol{\theta}_0)$ contre la présence d'autocorrélation au délai j consiste alors à rejeter $H_0(\boldsymbol{\theta}_0)$ au niveau α_j ($0 < \alpha_j < 1$) lorsque

$$D_j(\boldsymbol{\theta}_0) < d_{1j}(\alpha_{1j}) \text{ ou } D_j(\boldsymbol{\theta}_0) > d_{2j}(\alpha_{2j}) \quad (3.9)$$

où $d_{1j}(\alpha_{1j})$ et $d_{2j}(\alpha_{2j})$ sont choisis de façon telle que, sous l'hypothèse nulle,

$$\mathbf{P}[D_j(\boldsymbol{\theta}_0) < d_{1j}(\alpha_{1j})] \leq \alpha_{1j}, \quad \mathbf{P}[D_j(\boldsymbol{\theta}_0) > d_{2j}(\alpha_{2j})] \leq \alpha_{2j}$$

et $\alpha_{1j} + \alpha_{2j} = \alpha_j$, $0 \leq \alpha_{1j} \leq 1$, $0 \leq \alpha_{2j} \leq 1$.

En combinant les statistiques $D_j(\boldsymbol{\theta}_0)$, $j = 1, \dots, p$, il est facile d'obtenir un test de $H_0(\boldsymbol{\theta}_0)$ contre la présence d'autocorrélation aux délais $j = 1, \dots, p$: il suffit de rejeter $H_0(\boldsymbol{\theta}_0)$ lorsqu'au moins un des tests $D_j(\boldsymbol{\theta}_0)$, $j = 1, \dots, p$, rejette $H_0(\boldsymbol{\theta}_0)$. On appelle une telle procédure un *test*

²La théorie des tests de type Durbin-Watson contre l'autocorrélation à des délais plus grand que un a été discutée par de nombreux auteurs ; voir par exemple, Wallis (1972), Schmidt (1972), Vinod (1973) et King (1987).

induit.³ Pourvu que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p \leq \alpha$, le niveau global de la procédure n'excède pas α (par l'inégalité de Boole-Bonferroni). Le test induit ainsi construit a les particularités suivantes : d'une part on teste le vecteur complet des valeurs de θ et, d'autre part, c'est un test exact de niveau qui n'excède pas α .

4. Région de confiance pour θ

Si on se sert du test induit décrit à la section précédente, l'hypothèse $H_0(\theta_0) : \theta = \theta_0$ n'est pas rejetée lorsque $d_{1j}(\alpha_{1j}) \leq D_j(\theta_0) \leq d_{2j}(\alpha_{2j})$ pour $j = 1, \dots, p$. Par conséquent, l'ensemble des valeurs de θ_0 qui ne sont pas rejetées par cette procédure,

$$I = \{\theta_0 : d_{1j}(\alpha_{1j}) \leq D_j(\theta_0) \leq d_{2j}(\alpha_{2j}), j = 1, \dots, p\} \quad (4.1)$$

est une région de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$:

$$P[\theta \in I] \geq 1 - \alpha. \quad (4.2)$$

Autrement dit, la région est obtenue en "inversant" la famille de tests proposée pour des hypothèses de type $H_0(\theta_0)$. Si, de plus, on restreint θ à un ensemble de valeurs admissibles \tilde{S}_p , l'ensemble $I \cap \tilde{S}_p$ constitue aussi une région de confiance de niveau $1 - \alpha$ (quand les conditions imposées sont correctes). Bien que classique en statistique mathématique [voir Lehmann (1986, Chapter 3)], l'approche qui consiste à inverser un test général pour obtenir une région de confiance a été rarement utilisée de façon explicite en économétrie ; pour quelques exemples, le lecteur, pourra consulter Anderson et Rubin (1949), Dufour (1990, 1997), Staiger et Stock (1997), Dufour et Kiviet (1998), Dufour et Torrès (1998) et Dufour et Jasiak (2001).

Nous allons maintenant étudier de façon plus précise comment construire la région de confiance I . Pour ce faire, il sera utile d'examiner d'abord des cas spéciaux, les processus AR(1) et AR(2), pour ensuite traiter le cas général d'un processus AR(p).

4.1. Processus autorégressif d'ordre 1

Dans le cas d'un processus AR(1), les équations (2.1) et (2.3) s'écrivent :

$$y_t = \beta_1 + \varphi y_{t-1} + u_t = \beta_1 + \theta_1 y_{t-1} + u_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.3)$$

où $u_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N[0, \sigma^2]$, $t = 1, \dots, T$, $T \geq 2$, $\theta_1 = \varphi$ et y_0 est indépendant de $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_T)'$. Nous n'imposerons pas de conditions supplémentaires sur la distribution de y_0 . Afin de construire une région de confiance exacte pour θ_1 , on considère une famille de tests de la forme (3.9) pour les hypothèses $H_0(\theta_{10})$. Alors l'ensemble des valeurs θ_{10} qui ne sont pas rejetées par cette méthode,

$$I = \{\theta_{10} : d_{11}(\alpha_{11}) \leq D_1(\theta_{10}) \leq d_{21}(\alpha_{21})\}, \quad (4.4)$$

³Pour plus de détails sur ce type de méthodes, le lecteur pourra consulter Dufour (1990), Dufour et Torrès (1998) ainsi que les diverses références fournies dans ces articles.

est une région de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour θ_1 , où $\alpha = \alpha_{11} + \alpha_{21}$. Il est clair que

$$\theta_1 \in I \quad \text{ssi} \quad d_{11}(\alpha_{11}) \leq D_1(\theta_1) \leq d_{21}(\alpha_{21}), \quad (4.5)$$

ce qui équivaut à dire que $\theta_1 \in I_1 \cap I_2$, où

$$I_1 = \{\theta_{10} : D_1(\theta_{10}) \geq d_{11}(\alpha_{11})\}, \quad I_2 = \{\theta_{10} : D_1(\theta_{10}) \leq d_{21}(\alpha_{21})\} \quad (4.6)$$

et “ssi” signifie “si et seulement si”. En remplaçant $D_1(\theta_1)$ par la formule (3.5), on aura : $\theta_1 \in I_1 \cap I_2$ ssi

$$D_1(\theta_1) = \frac{z(\theta_1)' \bar{\mathbf{A}}_1 z(\theta_1)}{z(\theta_1)' \bar{\mathbf{B}}_1 z(\theta_1)} \geq d_{11}(\alpha_{11}) \quad \text{et} \quad D_1(\theta_1) = \frac{z(\theta_1)' \bar{\mathbf{A}}_1 z(\theta_1)}{z(\theta_1)' \bar{\mathbf{B}}_1 z(\theta_1)} \leq d_{21}(\alpha_{21}) \quad (4.7)$$

ou, de façon équivalente,

$$z(\theta_1)' \bar{\mathbf{C}}_{11} z(\theta_1) \geq 0 \quad \text{et} \quad z(\theta_1)' \bar{\mathbf{C}}_{21} z(\theta_1) \leq 0 \quad (4.8)$$

où $\bar{\mathbf{C}}_{11} = \bar{\mathbf{A}}_1 - d_{11}(\alpha_{11}) \bar{\mathbf{B}}_1$, $\bar{\mathbf{C}}_{21} = \bar{\mathbf{A}}_1 - d_{21}(\alpha_{21}) \bar{\mathbf{B}}_1$, $\alpha_{11} + \alpha_{21} = \alpha$, $0 \leq \alpha_{11} \leq 1$, $0 \leq \alpha_{21} \leq 1$, et

$$z(\theta_1) = \mathbf{y} - \theta_1 \mathbf{y}_{-1}, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_T)', \quad \mathbf{y}_{-1} = (y_0, y_1, \dots, y_{T-1})'. \quad (4.9)$$

En remplaçant $z(\theta_1)$ par sa valeur en (4.9) et, après quelques manipulations, on peut voir que $\theta_1 \in I_1 \cap I_2$ ssi

$$a_{11} \theta_1^2 + b_{11} \theta_1 + c_{11} \geq 0 \quad \text{et} \quad a_{21} \theta_1^2 + b_{21} \theta_1 + c_{21} \leq 0 \quad (4.10)$$

où

$$a_{11} = \mathbf{y}'_{-1} \bar{\mathbf{C}}_{11} \mathbf{y}_{-1}, \quad b_{11} = -2 \mathbf{y}'_{-1} \bar{\mathbf{C}}_{11} \mathbf{y}, \quad c_{11} = \mathbf{y}' \bar{\mathbf{C}}_{11} \mathbf{y}, \quad (4.11)$$

$$a_{21} = \mathbf{y}'_{-1} \bar{\mathbf{C}}_{21} \mathbf{y}_{-1}, \quad b_{21} = -2 \mathbf{y}'_{-1} \bar{\mathbf{C}}_{21} \mathbf{y}, \quad c_{21} = \mathbf{y}' \bar{\mathbf{C}}_{21} \mathbf{y}. \quad (4.12)$$

Une fois qu'on a les racines des deux polynômes du second degré en (4.10), il est facile de trouver les valeurs de θ_1 , pour lesquelles $a_{11} \theta_1^2 + b_{11} \theta_1 + c_{11} \geq 0$ et $a_{21} \theta_1^2 + b_{21} \theta_1 + c_{21} \leq 0$. Ces dernières constituent la région de confiance $I = I_1 \cap I_2$. Si de plus, on impose la condition de stationnarité $|\theta_1| < 1$, l'ensemble $\tilde{I} = I_1 \cap I_2 \cap (-1, +1)$ constitue toujours une région de confiance de niveau α . De même, si on impose plutôt $|\theta_1| \leq 1$, l'ensemble $\tilde{I} = I_1 \cap I_2 \cap [-1, +1]$ sera une région de confiance de niveau α .

4.2. Processus autorégressif d'ordre 2

Dans le cas d'un processus AR(2), l'équation (2.3) devient :

$$\begin{aligned} y_t &= \beta_1 + \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 (y_{t-1} - y_{t-2}) + u_t \\ &= \beta_1 + \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 \Delta y_{t-1} + u_t, \quad t = 1, \dots, T, \end{aligned} \quad (4.13)$$

où $u_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N[0, \sigma^2]$, $t = 1, \dots, T$, $T \geq 3$ et y_{-1}, y_0 sont indépendants de $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_T)'$. Afin de construire une région de confiance valide pour $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)'$, on considère une famille de tests du type (3.9) avec $j = 1, 2$, pour des hypothèses de la forme $H_0(\boldsymbol{\theta}_0)$, où $\boldsymbol{\theta}_0 = (\theta_{10}, \theta_{20})'$ est le vecteur des valeurs hypothétiques. L'ensemble des valeurs de $\boldsymbol{\theta}_0$ non rejetées par le test,

$$I = \{\boldsymbol{\theta}_0 : d_{1j}(\alpha_{1j}) \leq D_j(\boldsymbol{\theta}_0) \leq d_{2j}(\alpha_{2j}), j = 1, 2\}, \quad (4.14)$$

est une région de confiance conjointe pour $\boldsymbol{\theta}$ de niveau supérieur ou égal à $1 - \alpha$. Nous avons :

$$\boldsymbol{\theta} \in I \quad \text{ssi} \quad (\boldsymbol{\theta} \in I_1 \text{ et } \boldsymbol{\theta} \in I_2)$$

où

$$I_1 = \{\boldsymbol{\theta}_0 : D_j(\boldsymbol{\theta}_0) \geq d_{1j}(\alpha_{1j}), j = 1, 2\}, \quad I_2 = \{\boldsymbol{\theta}_0 : D_j(\boldsymbol{\theta}_0) \leq d_{2j}(\alpha_{2j}), j = 1, 2\}.$$

En remplaçant de nouveau $D_j(\boldsymbol{\theta})$ par la formule (3.5), on voit que

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\theta} \in I_1 \text{ et } \boldsymbol{\theta} \in I_2) \quad \text{ssi} \quad & \left(d_{1j}(\alpha_{1j}) \leq \frac{\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta})' \overline{\mathbf{A}}_j \mathbf{z}(\boldsymbol{\theta})}{\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta})' \overline{\mathbf{B}}_j \mathbf{z}(\boldsymbol{\theta})} \leq d_{2j}(\alpha_{2j}), j = 1, 2 \right) \\ \text{ssi} \quad & (\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta})' \overline{\mathbf{C}}_{1j} \mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}) \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{z}(\boldsymbol{\theta})' \overline{\mathbf{C}}_{2j} \mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}) \leq 0, j = 1, 2) \end{aligned} \quad (4.15)$$

où $\overline{\mathbf{C}}_{1j} = \overline{\mathbf{A}}_j - d_{1j}(\alpha_{1j}) \overline{\mathbf{B}}_j$, $\overline{\mathbf{C}}_{2j} = \overline{\mathbf{A}}_j - d_{2j}(\alpha_{2j}) \overline{\mathbf{B}}_j$,

$$\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{y} - \theta_2 \Delta \mathbf{y}_{-1}) - \theta_1 \mathbf{y}_{-1},$$

$$\mathbf{y}_{-1} = (y_0, \dots, y_{T-1})', \quad \Delta \mathbf{y}_{-1} = (y_0 - y_{-1}, y_1 - y_0, \dots, y_{T-1} - y_{T-2})'.$$

Ici $\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta})$ dépend de deux paramètres inconnus θ_1 et θ_2 . Si on fixe $\theta_2 = \theta_{20}$, la résolution de ces inéquations nécessite la recherche des racines de quatre polynômes du second degré comme dans le cas d'un processus AR(1). Pour θ_{20} donné, définissons :

$$\begin{aligned} I_1(\theta_{20}) &= \{(\theta_1, \theta_{20})' : D_j(\theta_1, \theta_{20}) \geq d_{1j}, j = 1, 2\}, \\ I_2(\theta_{20}) &= \{(\theta_1, \theta_{20})' : D_j(\theta_1, \theta_{20}) \leq d_{2j}, j = 1, 2\}, \\ I(\theta_{20}) &= \{\boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\theta} \in I_1(\theta_{20}) \text{ et } \boldsymbol{\theta} \in I_2(\theta_{20})\}. \end{aligned}$$

$I(\theta_{20})$ représente le sous-ensemble conditionnel (possiblement vide) des éléments de I tels que $\theta_2 = \theta_{20}$. On voit facilement que $I = \bigcup_{\theta_{20} \in \tilde{S}_2} I(\theta_{20})$ où \tilde{S}_2 est l'ensemble des valeurs admissibles de θ_2 . $(\theta_1, \theta_{20})' \in I(\theta_{20})$ ssi les inéquations (4.15) sont vérifiées pour

$$\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{y} - \theta_{20} \Delta \mathbf{y}_{-1}) - \theta_1 \mathbf{y}_{-1} = \mathbf{z}(\theta_{20}) - \theta_1 \mathbf{y}_{-1}.$$

De plus,

$$\boldsymbol{\theta} \in I_1(\theta_{20}) \quad \text{ssi} \quad (a_{1j} \theta_1^2 + b_{1j} \theta_1 + c_{1j} \geq 0, j = 1, 2),$$

$$\boldsymbol{\theta} \in I_2(\theta_{20}) \quad \text{ssi} \quad (a_{2j} \theta_1^2 + b_{2j} \theta_1 + c_{2j} \leq 0, j = 1, 2),$$

où

$$a_{ij} = \mathbf{y}'_{-1} \bar{\mathbf{C}}_{ij} \mathbf{y}_{-1}, \quad b_{ij} = -2\mathbf{y}'_{-1} \bar{\mathbf{C}}_{ij} \mathbf{z}(\theta_{20}), \quad c_{ij} = \mathbf{z}(\theta_{20})' \bar{\mathbf{C}}_{ij} \mathbf{z}(\theta_{20}), \quad i, j = 1, 2.$$

Notons que le choix de fixer θ_2 plutôt que θ_1 n'est pas arbitraire, car si on impose les conditions de stabilité, le domaine des valeurs admissibles de θ_2 est plus restreint que celui de θ_1 . On peut alors effectuer un balayage des valeurs admissibles de θ_{20} , en résolvant à chaque fois les inéquations (4.15) correspondantes. On trouve ainsi :

$$I = \bigcup_{\theta_{20} \in \tilde{S}_2} I(\theta_{20}) = \bigcup_{\theta_{20} \in \tilde{S}_2} [I_1(\theta_{20}) \cap I_2(\theta_{20})].$$

En particulier, si on impose les conditions de stabilité sur θ_2 et θ_1 , la région de confiance

$$I = \bigcup_{\theta_{20} \in \tilde{S}_2} [I_1(\theta_{20}) \cap I_2(\theta_{20})] \cap \tilde{S}_2, \quad (4.16)$$

où $\tilde{S}_2 = \{(\theta_1, \theta_2)' : -3 < \theta_1 < 1, |\theta_2| < 1, 2\theta_2 + \theta_1 > -1\}$, est de niveau $1 - \alpha$ pour θ .⁴

4.3. Processus autorégressif général

Pour le cas d'un processus AR(p), où $p \geq 1$, on peut procéder de façon analogue. On considère p tests de la forme (3.9), et l'ensemble des valeurs de θ_0 qui ne sont rejetées par aucun de ces tests,

$$I = \{\theta_0 : d_{1j}(\alpha_{1j}) \leq D_j(\theta_0) \leq d_{2j}(\alpha_{2j}), \quad j = 1, \dots, p\},$$

constitue une région de confiance conjointe de niveau $1 - \alpha$ pour θ . Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \theta \in I & \text{ ssi } (D_j(\theta) \geq d_{1j}(\alpha_{1j}) \quad \text{et} \quad D_j(\theta) \leq d_{2j}(\alpha_{2j}), \quad j = 1, \dots, p) \\ & \text{ ssi } (\theta \in I_1 \quad \text{et} \quad \theta \in I_2) \end{aligned} \quad (4.17)$$

où

$$I_1 = \{\theta_0 : D_j(\theta_0) \geq d_{1j}(\alpha_{1j}), \quad j = 1, \dots, p\}, \quad I_2 = \{\theta_0 : D_j(\theta_0) \leq d_{2j}(\alpha_{2j}), \quad j = 1, \dots, p\}.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \theta \in I_1 & \text{ ssi } (D_j(\theta) \geq d_{1j}(\alpha_{1j}), \quad j = 1, \dots, p) \\ & \text{ ssi } \left(\frac{\mathbf{z}(\theta)' \bar{\mathbf{A}}_j \mathbf{z}(\theta)}{\mathbf{z}(\theta)' \bar{\mathbf{B}}_j \mathbf{z}(\theta)} \geq d_{1j}(\alpha_{1j}), \quad j = 1, \dots, p \right) \\ & \text{ ssi } (\mathbf{z}(\theta)' \bar{\mathbf{C}}_{1j} \mathbf{z}(\theta) \geq 0, \quad j = 1, \dots, p) \end{aligned} \quad (4.18)$$

⁴ S_2 est la région de stationnarité pour un processus autorégressif d'ordre deux. Sur les conditions que doivent satisfaire les coefficients de processus autorégressifs d'ordre 2 à 5 pour être stationnaires, le lecteur pourra consulter Farebrother (1973, 1974b, 1974a, 1974c, 1976, 1987).

où $\overline{C}_{1j} \equiv \overline{A}_j - d_{1j}(\alpha_{1j})\overline{B}_j$,

$$\begin{aligned} z(\boldsymbol{\theta}) &= (\mathbf{y} - \theta_2 \Delta \mathbf{y}_{-1} - \theta_3 \Delta \mathbf{y}_{-2} - \dots - \theta_p \Delta \mathbf{y}_{-p+1}) - \theta_1 \mathbf{y}_{-1} = \mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}_2) - \theta_1 \mathbf{y}_{-1}, \\ \boldsymbol{\theta}_2 &= (\theta_2, \dots, \theta_p)', \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_T)', \quad \mathbf{y}_{-1} = (y_0, y_1, \dots, y_{T-1})', \\ \Delta \mathbf{y}_{-k} &= (\Delta y_{-k}, \dots, \Delta y_0, \dots, \Delta y_{T-k+1})', \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Les inéquations (4.18) dépendent de p paramètres inconnus. Si on fixe $\boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{\theta}_2^0 = (\theta_{20}, \dots, \theta_{p0})'$, le problème se réduit à la résolution de polynômes du second degré en θ_1 . Plus précisément,

$$\begin{aligned} (\theta_1, \boldsymbol{\theta}_2^0) \in I_1(\boldsymbol{\theta}_2^0) \quad \text{ssi} \quad & ((z(\boldsymbol{\theta}_2^0) - \theta_1 \mathbf{y}_{-1})' \overline{C}_{1j} (z(\boldsymbol{\theta}_2^0) - \theta_1 \mathbf{y}_{-1}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, p) \\ & \text{ssi} \quad (z(\boldsymbol{\theta}_2^0)' \overline{C}_{1j} z(\boldsymbol{\theta}_2^0) - 2\theta_1 \mathbf{y}_{-1}' \overline{C}_{1j} z(\boldsymbol{\theta}_2^0) + \theta_1^2 \mathbf{y}_{-1}' \overline{C}_{1j} \mathbf{y}_{-1} \geq 0, \quad j = 1, \dots, p). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Il s'agit donc de trouver les valeurs de θ_1 qui satisfont les inéquations

$$a_{1j}\theta_1^2 + b_{1j}\theta_1 + c_{1j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad (4.20)$$

où $a_{1j} = \mathbf{y}_{-1}' \overline{C}_{1j} \mathbf{y}_{-1}$, $b_{1j} = -2\mathbf{y}_{-1}' \overline{C}_{1j} z(\boldsymbol{\theta}_2^0)$, $c_{1j} = z(\boldsymbol{\theta}_2^0)' \overline{C}_{1j} z(\boldsymbol{\theta}_2^0)$. De la même façon,

$$(\theta_1, \boldsymbol{\theta}_2^0) \in I_2(\boldsymbol{\theta}_2^0) \quad \text{ssi} \quad a_{2j}\theta_1^2 + b_{2j}\theta_1 + c_{2j} \leq 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad (4.21)$$

où $a_{2j} = \mathbf{y}_{-1}' \overline{C}_{2j} \mathbf{y}_{-1}$, $b_{2j} = -2\mathbf{y}_{-1}' \overline{C}_{2j} z(\boldsymbol{\theta}_2^0)$, $c_{2j} = z(\boldsymbol{\theta}_2^0)' \overline{C}_{2j} z(\boldsymbol{\theta}_2^0)$ et $\overline{C}_{2j} = \overline{A}_j - d_{2j}\overline{B}_j$. Pour chaque $\boldsymbol{\theta}_2^0$ fixe, on obtient une région de confiance $I_1(\boldsymbol{\theta}_2^0) \cap I_2(\boldsymbol{\theta}_2^0)$, pour θ_1 (conditionnelle par rapport à $\boldsymbol{\theta}_2^0$). En faisant ainsi un balayage de l'ensemble des valeurs possibles de $\boldsymbol{\theta}_2^0$ et en résolvant les $2p$ polynômes du second degré en (4.20) et (4.21), on construit alors la région de confiance conjointe

$$I = \bigcup_{\boldsymbol{\theta}_2^0 \in \tilde{S}_2} [I_1(\boldsymbol{\theta}_2^0) \cap I_2(\boldsymbol{\theta}_2^0)]$$

où \tilde{S}_2 est l'ensemble des valeurs de $\boldsymbol{\theta}_2^0$ admissibles (par exemple, sous l'hypothèse de stationnarité).

5. Tests d'hypothèses générales

Supposons maintenant que l'on s'intéresse à p fonctions $g_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, g_p(\boldsymbol{\theta})$ de $\boldsymbol{\theta}$. Étant donnée la région I , on peut construire par une méthode de projection des régions de confiance simultanées de niveau $1 - \alpha$ pour $g_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, g_p(\boldsymbol{\theta})$. En effet,

$$\boldsymbol{\theta} \in I \Rightarrow g_i(\boldsymbol{\theta}) \in g_i(I), \quad i = 1, \dots, p, \quad (5.1)$$

et donc

$$P[g_i(\boldsymbol{\theta}) \in g_i(I), \quad i = 1, \dots, p] \geq P[\boldsymbol{\theta} \in I] \geq 1 - \alpha. \quad (5.2)$$

Les régions de confiance $g_i(I)$, $i = 1, \dots, p$ ainsi définies sont dites *simultanées*, car la probabilité que les p événements $g_i(\boldsymbol{\theta}) \in g_i(I)$, $i = 1, \dots, p$, se produisent ensemble (simultanément)

est au moins égale à $1 - \alpha$. Les intervalles de confiance usuels (comme les intervalles de niveau $1 - \alpha$ habituellement rapportés pour les coefficients d'une régression) ne sont pas simultanés [voir Miller (1981) et Savin (1984)], ce qui signifie que la fiabilité de l'analyse peut se détériorer de façon marquée si l'on considère des transformations qui font intervenir plusieurs paramètres du modèle. Comme cas spécial, on peut s'intéresser aux composantes individuelles θ_i du vecteur $\boldsymbol{\theta}$, ce qui permet d'obtenir des intervalles de confiance simultanés pour les différents coefficients $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$. Il est clair en outre que la condition (5.2) implique

$$P[g_i(\boldsymbol{\theta}) \in g_i(I)] \geq 1 - \alpha, \quad i = 1, \dots, p, \quad (5.3)$$

c'est-à-dire les régions de confiance $g_i(I)$ sont aussi des régions de confiance marginales au sens usuel du terme. Comme autre cas spécial, on peut s'intéresser à la construction de régions de confiance pour les racines du polynôme autorégressif en (2.1) et, à partir de là, examiner si ces racines se trouvent à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle unité.

Sur la base d'une région de confiance I pour $\boldsymbol{\theta}$, on peut aussi tester n'importe quelle restriction sur les paramètres du modèle. Considérons en effet une hypothèse générale de la forme

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_0 \quad (5.4)$$

où Ω_0 est un sous-ensemble non vide de \mathbb{R}^p . Une façon simple de tester H_0 consiste à

$$\text{rejeter } H_0 \text{ lorsque } I \cap \Omega_0 = \emptyset \quad (5.5)$$

où I est une région de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour $\boldsymbol{\theta}$, c'est-à-dire

$$P[\boldsymbol{\theta} \in I] \geq 1 - \alpha. \quad (5.6)$$

Le test ainsi construit est de niveau α . Sous H_0 , l'événement $\boldsymbol{\theta} \in I$ est équivalent à $\boldsymbol{\theta} \in I \cap \Omega_0$, et donc

$$P[I \cap \Omega_0 = \emptyset] \leq P[\boldsymbol{\theta} \notin I \cap \Omega_0] = P[\boldsymbol{\theta} \notin I] \leq \alpha. \quad (5.7)$$

Par exemple, on peut tester des hypothèses portant sur les racines du polynôme autorégressif en (2.1) ou (2.3), lesquelles constituent en général des transformations non-linéaires des coefficients de ces polynômes. Pour ce faire on peut associer à la région I les régions correspondantes $R_i(I)$, $i = 1, \dots, p$, pour les racines de ces polynômes (qu'on peut ordonner de façon naturelle par ordre croissant des modules). De là, on peut tester n'importe quelle hypothèse sur la position de ces racines, sur la plus grande racine en module, etc. Le lecteur trouvera une discussion plus approfondie de ce genre de méthodes dans Dufour (1997), Abdelkhalik et Dufour (1998), Dufour et Kiviet (1998) et Dufour et Jasiak (2001).

6. Application au P.I.B. réel tunisien

Afin d'illustrer les méthodes proposées plus haut, nous allons étudier la série du P.I.B. réel tunisien (PIB_t) de 1961 à 1992 (annuel, en millions de dinars de 1990).⁵ Si on commence par examiner le graphe de la série PIB_t , on voit que cette dernière croît de façon exponentielle. Il apparaît donc approprié de prendre le logarithme de la série, que nous noterons $y_t = \ln(PIB_t)$. Cette dernière croît de façon linéaire. Après avoir examiné [suivant la méthode de Box et Jenkins (1976)] les autocorrélations et les autocorrélations partielles de cette série (voir les figures 1 et 2), il nous est apparu qu'un modèle de type AR(2) serait approprié pour la série y_t ; pour plus de détails, le lecteur pourra consulter Neifar (1996). Si on estime un tel modèle par moindres carrés ordinaires (MCO), on trouve le résultat suivant :

$$y_t = \begin{array}{cccc} 0.2987 + & 0.9734 y_{t-1} - & 0.2836 (y_{t-1} - y_{t-2}) & + \hat{u}_t, \\ (0.1276) & (0.0146) & (0.1661) & \\ (2.3409) & (66.6637) & (-1.708) & \end{array} \quad (6.1)$$

$$\bar{R}^2 = 0.9936, \quad DW = 1.77, \quad SSR = 0.0389,$$

où les chiffres entre parenthèses sont respectivement les écarts-types et les statistiques t de Student, DW est la statistique de Durbin-Watson et SSR la somme des carrés des erreurs. Si on suppose que les statistiques t de Student pour tester différentes valeurs de θ_1 et θ_2 dans ce modèle suivent approximativement une loi $t(27)$, on peut calculer des intervalles de confiance pour θ_1 et θ_2 . Ainsi aux niveaux 0.95 et 0.975 [$t_{.025}(27) = 2.052$ et $t_{.0125}(27) = 2.3734$], on obtient de cette manière les intervalles suivants : au niveau 0.95,

$$\theta_1 \in [.9445, 1.0044], \quad \theta_2 \in [-.6244, .05712], \quad (6.2)$$

et, au niveau 0.975,

$$\theta_1 \in [.9398, 1.0091], \quad \theta_2 \in [-.6778, .1105]. \quad (6.3)$$

Bien entendu, la fiabilité d'une telle approximation peut être fort mauvaise ici (même asymptotiquement), notamment dans le voisinage du cercle unité. Nous rapportons ces intervalles seulement pour fin de référence.

Maintenant, nous allons utiliser l'approche développée dans les sections précédentes pour construire une région de confiance de niveau 0.95 pour $\theta = (\theta_1, \theta_2)'$. Les points critiques d_{1j} et d_{2j} , utilisés pour les statistiques d_1 et d_2 , calculés par l'algorithme d'Imhof (1961), sont les suivants : $d_{11} = 1.222$, $d_{21} = 2.77797$, $d_{12} = 1.1597$, $d_{22} = 2.7135$. Ces points correspondent à des probabilités de queue égales à $\alpha/4 = 0.0125$, de façon à ce que la probabilité de rejet du test global ne soit pas supérieure à $\alpha = 0.05$.

Comme en présence d'une constante, la statistique $d_j(\theta)$ a une distribution symétrique par rapport à 2, il est naturel de choisir $\alpha_{ij} = \alpha_j/2$. De plus, nous avons traité de façon symétrique les deux coefficients θ_1 et θ_2 , d'où le choix de $\alpha_{ij} = \alpha/4$. Notons que les différents partages de α

⁵Les données utilisées proviennent de la "Banque de données macro-économiques" de l'Institut d'économie quantitative de Tunis (1992).

en α_j , $j = 1, \dots, p$ conduisent à des procédures différentes dont les puissances ne sont pas en principe identiques. A priori il n'est pas évident qu'un certain partage domine uniformément les autres.

Si on considère d'abord un ensemble admissible de valeur de θ_2 contraint sur $[-2.0, 2.0]$, sans imposer les conditions de stationnarité, on obtient la région de confiance conjointe pour θ_1 et θ_2 qui apparaît sur la figure 3. On remarque que celle-ci est très allongée autour de $\theta_1 = 1$, qu'elle est petite par rapport au triangle de stationnarité, et que l'estimation de θ_1 paraît beaucoup plus précise que celle de θ_2 .⁶ À la figure 4, nous montrons un agrandissement de la région pertinente.

Pour obtenir des intervalles de confiance pour θ_1 et θ_2 , nous procédons par projection sur les axes θ_1 et θ_2 , ce qui donne les intervalles de confiance (simultanés) suivants :

$$\theta_1 \in [.84, 1.14], \quad \theta_2 \in [-2, 2]. \quad (6.4)$$

On remarque que l'intervalle pour θ_1 est très précis, tandis que l'intervalle pour θ_2 n'est pas informatif. Ces résultats illustrent le fait que c'est la paire de coefficient $(\theta_1, \theta_2)'$ qui est importante pour déterminer la distribution des données et non les coefficients individuels θ_1 et θ_2 . Il est clair d'après ces résultats que l'hypothèse $\theta_1 = 1$ ne peut être rejetée au niveau .05.

Si on impose maintenant une condition de stationnarité sur θ_1 et θ_2 , c'est-à-dire on restreint les coefficients à l'ensemble

$$S = \{ |\theta_2| < 1, -3 < \theta_1 < 1 \text{ et } 2\theta_2 + \theta_1 > -1 \}, \quad (6.5)$$

on obtient la portion de la région de confiance originale située à l'intérieur du triangle de la figure 3. Cette région est aussi de niveau au moins égal à 0.95 (pourvu que la contrainte de stationnarité soit satisfaite). Les intervalles de confiance par projection correspondants sont alors :

$$\theta_1 \in [.92; 1), \quad \theta_2 \in (-1; 1).$$

Nous remarquons enfin que ces résultats sont compatibles avec ceux que suggèrent l'équation (4.1), car les paramètres trouvés par la première méthode appartiennent aux intervalles de confiance exacts. En outre, les intervalles de confiance pour θ_1 sont très proches (notamment sous l'hypothèse de stationnarité), tandis que l'intervalle asymptotique pour θ_2 [voir (6.2)] est beaucoup plus petit que celui fondé sur la méthode exacte, ce qui jette un doute sur la fiabilité de l'approche asymptotique dans ce cas.

La région de confiance simultanée présentée à la figure 3 a été obtenue en fixant d'abord $\theta_2 = \theta_{20}$ puis, pour chaque valeur de θ_2 dans l'intervalle $[-2, 2]$, les valeurs de θ_1 qui ne sont pas rejetées (par résolution des équations du second degré décrites à la section 4.2). On pourrait procéder à l'inverse en fixant d'abord $\theta_1 = \theta_{10}$ et en cherchant les différents valeurs acceptables pour θ_2 . Cette modification conduit au même résultat.

⁶Ceci suggère qu'une fois fixée la valeur de θ_1 autour de 1, l'influence de la valeur de θ_2 sur la loi des données est difficile à détecter, à tout le moins sur un échantillon aussi petit que celui considéré ici. Bien qu'analogue à un problème de non-identification ou de quasi-non-identification [voir Dufour (1997)], cette difficulté se rapproche plus de l'imprécision induite par la multicollinéarité dans les modèles de régression _ car les valeurs retardées de séries intégrées ou quasi intégrées sont fortement corrélées entre elles.

7. Conclusion

L'inférence statistique sur des modèles autorégressifs d'ordre p est un problème central de l'analyse économétrique. Les méthodes disponibles sont généralement fondées sur des approximations asymptotiques. Il n'y a aucune garantie que ces méthodes sont "valides en échantillon fini".

Dans cet article, nous avons proposé des méthodes d'inférence valide en échantillon fini pour des processus possiblement non stationnaires. La particularité du calcul des régions de confiance réside dans sa simplicité. Dans le cas AR(1), la construction de régions de confiance se limite à la résolution de deux polynômes de second degré. L'application des méthodes proposées à un modèle du P.I.B. réel tunisien nous a permis d'obtenir des régions de confiance conjointes et individuelles qui sont assez précises. La recherche d'autres méthodes d'inférence exactes est souhaitable afin de faire une comparaison rigoureuse des résultats en terme de puissance et robustesse des différentes approches.

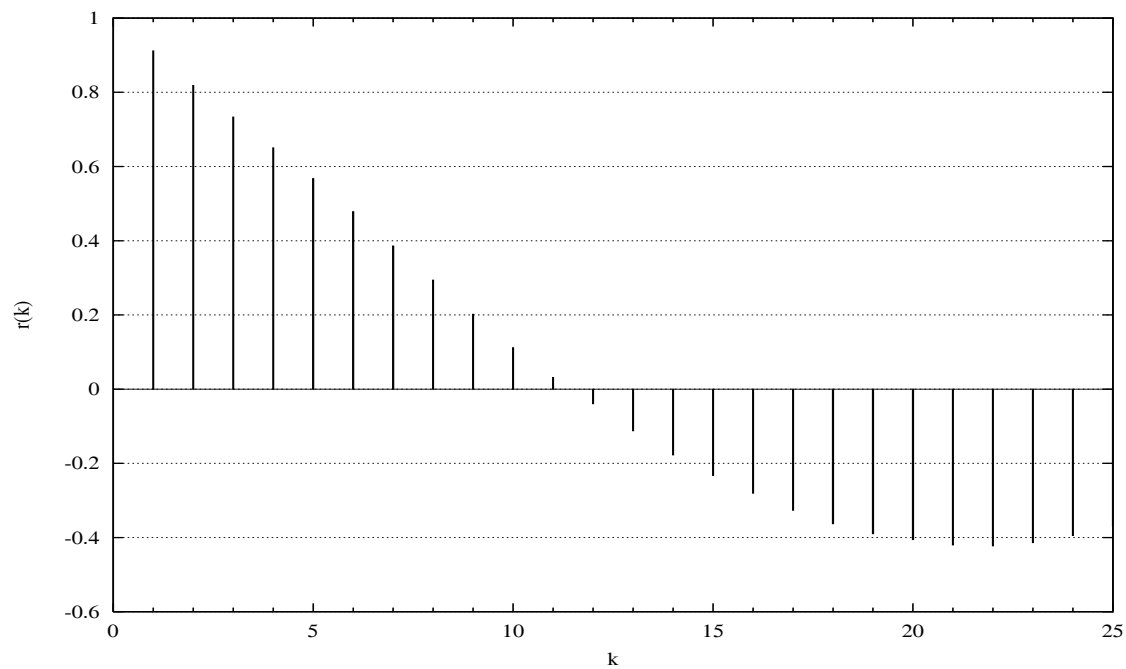


Figure 1. Autocorrélations du logarithme du P.I.B. tunisien (1961-1992)

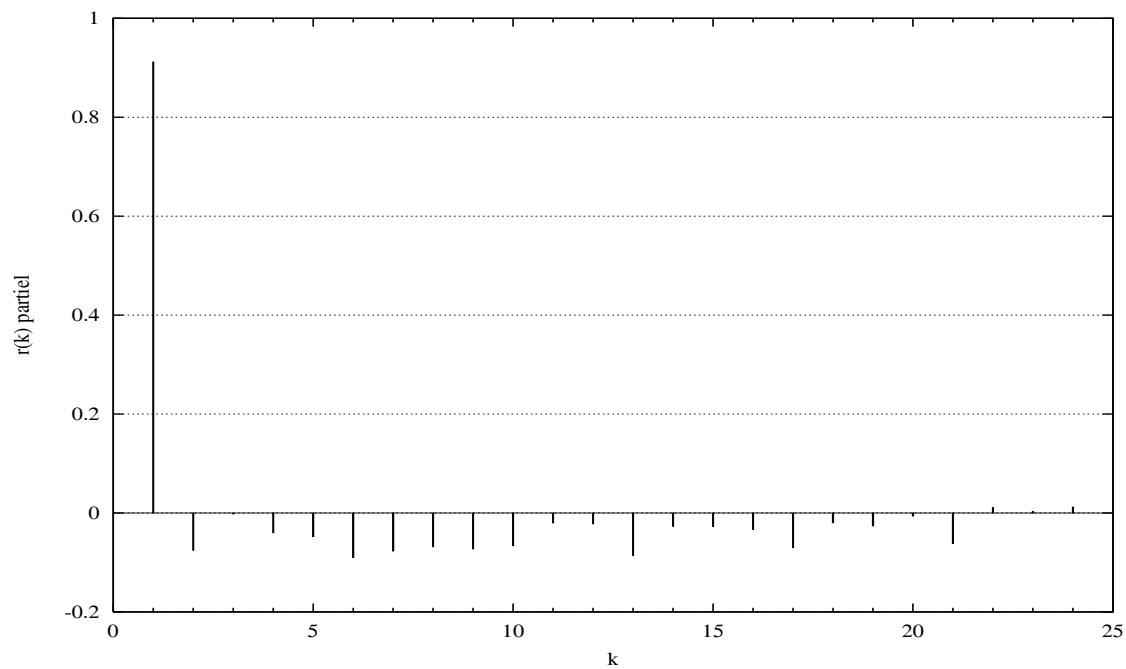


Figure 2. Autocorrélations partielles du logarithme du P.I.B. tunisien (1961-1992)

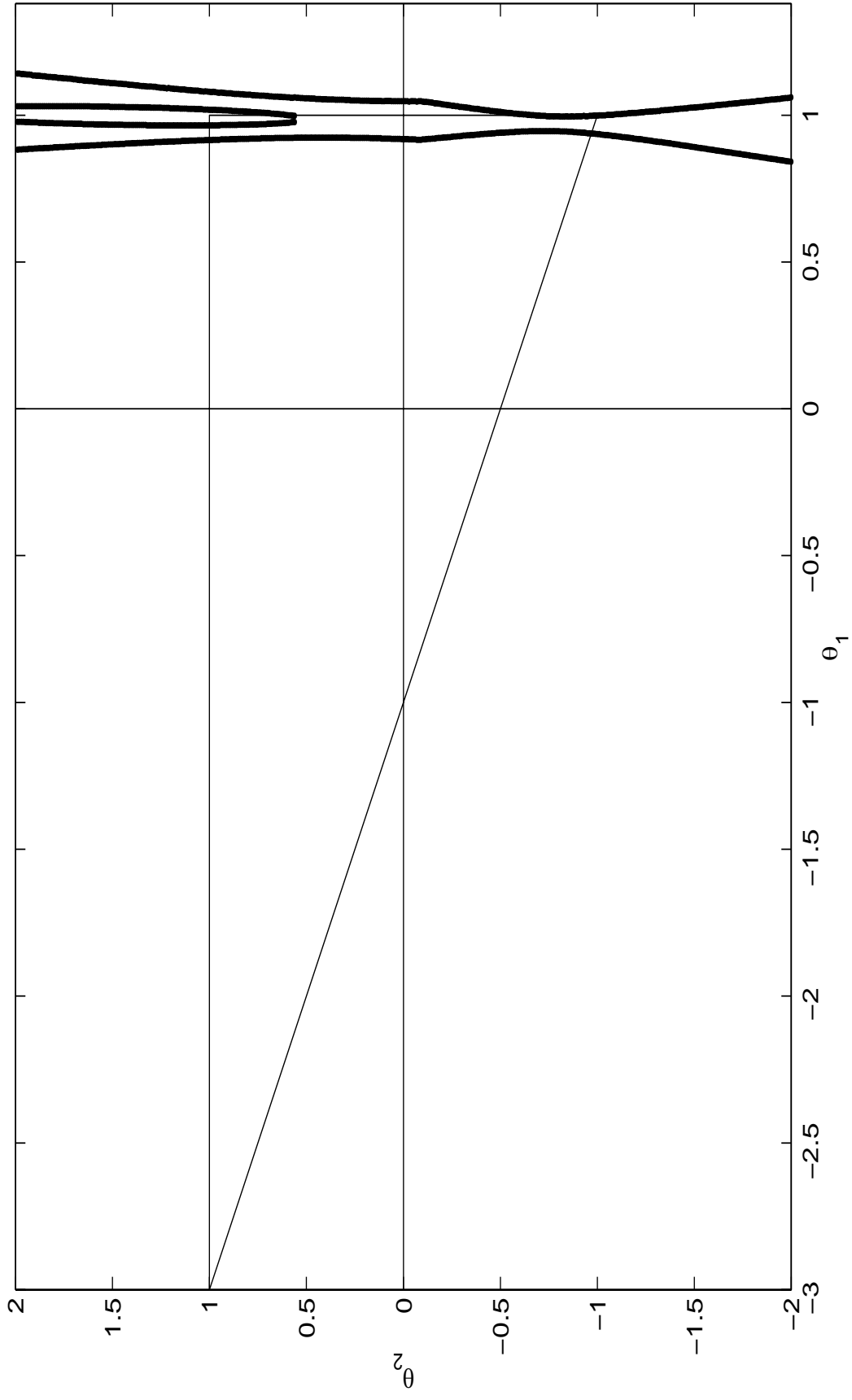


Figure 3. Région de confiance exacte de niveau 0.95
pour les coefficients du modèle AR(2) du P.I.B. tunisien (1961-1992)

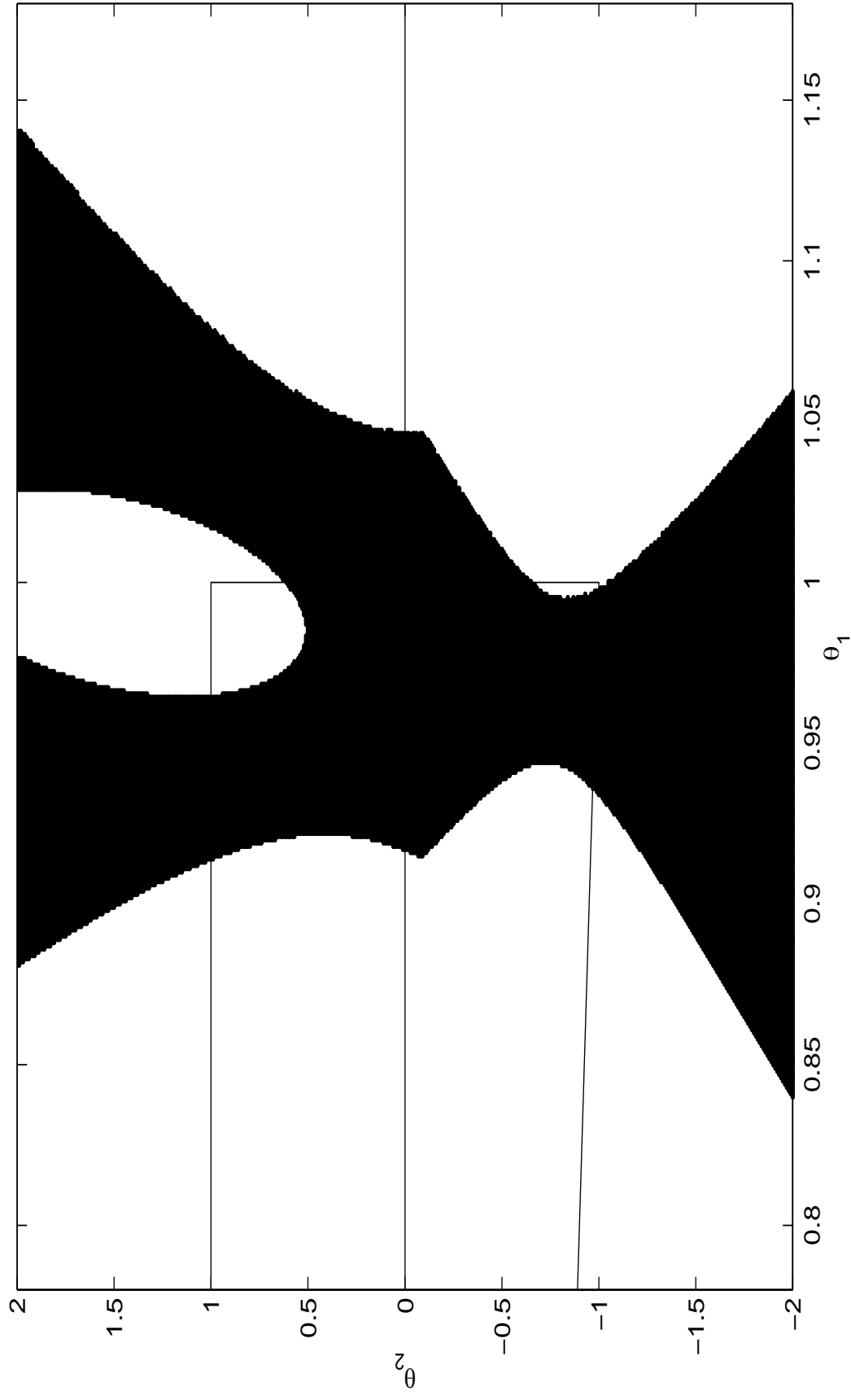


Figure 4. Région de confiance exacte agrandie de niveau 0.95 pour les coefficients du modèle AR(2) du P.I.B. tunisien (1961-1992)

A. Annexe : Données et autocorrélations

Tableau 1. P.I.B. réel tunisien, 1961-1992
(en millions de dinars de 1990)

Année	PIB
1961	2431.6
1962	2374.7
1963	2734.0
1964	2851.6
1965	3031.2
1966	3106.2
1967	3085.8
1968	3410.9
1969	3532.0
1970	3741.7
1971	4137.3
1972	4871.6
1973	4840.1
1974	5229.8
1975	5603.6
1976	6046.2
1977	6251.9
1978	6655.1
1979	7091.8
1980	7617.2
1981	8037.8
1982	7998.5
1983	8372.8
1984	8852.6
1985	9353.5
1986	9222.0
1987	9840.0
1988	9847.0
1989	10213.0
1990	10990.0
1991	11375.0
1992	12163.0

Tableau 2. Autocorrélations et autocorrélations partielles du logarithme du P.I.B. réel tunisien, 1961-1992

Délai (k)	Autocorrélation [$r(k)$]	Écart-type	Autocorrélation partielle
1	* 0.911624677837	0.1767766952966	* 0.911624677837
2	* 0.818356442376	0.2884288856504	-0.075192833381
3	* 0.733267433063	0.3536211620523	-0.001876696888
4	0.650194051243	0.3983126871889	-0.039830350218
5	0.567362646521	0.4302034586014	-0.047505926132
6	0.478247098459	0.4529832105987	-0.089690171463
7	0.385972015165	0.4684963255281	-0.076823098560
8	0.293770727743	0.4783301232559	-0.068264906179
9	0.201768718730	0.4839354650611	-0.072374264499
10	0.111642913432	0.4865572400397	-0.066005897468
11	0.031431359902	0.4873571140268	-0.019966845194
12	-0.039405040686	0.4874204573483	-0.021882496016
13	-0.112356415006	0.4875199991473	-0.085763851247
14	-0.177248195499	0.4883285239653	-0.026910760301
15	-0.232843600719	0.4903348906549	-0.027435997470
16	-0.280553644792	0.4937781018771	-0.033276589605
17	-0.326506302488	0.4987346094054	-0.070031296844
18	-0.362859541217	0.5053702686808	-0.019580442280
19	-0.389919630550	0.5134474645787	-0.025951918249
20	-0.405461440183	0.5226190115899	-0.006167375342
21	-0.419866256842	0.5323584952760	-0.061712385561
22	-0.422535797312	0.5426080971518	0.010751876181
23	-0.413724953451	0.5527947886379	0.003032835264
24	-0.394390532147	0.5623878549671	0.011750657336
25	-0.368500837571	0.5709654916499	0.001320210520

Remarque _ Les écart-types des autocorrélations sont celles qui sont asymptotiquement valides afin de tester la nullité de toutes les autocorrélations de délai plus grand ou égal à k , dans le cas d'un processus linéaire dont les innovations sont indépendantes et identiquement distribuées. L'écart-type asymptotique usuel pour les autocorrélations partielles est $1/\sqrt{n} = 1/\sqrt{32} = 0.17678$. Les autocorrélations significatives au niveau de 0.05 sont marquées d'un astérisque (*).

Références

- Abdelkhalek, T. et Dufour, J.-M. (1998), 'Statistical inference for computable general equilibrium models, with application to a model of the Moroccan economy', *Review of Economics and Statistics* **LXXX**, 520–534.
- Anderson, T. W. et Rubin, H. (1949), 'Estimation of the parameters of a single equation in a complete system of stochastic equations', *Annals of Mathematical Statistics* **20**, 46–63.
- Ansley, G. H., Shively, T. S. et Kohn, R. (1992), 'Computing p -value for the generalised Durbin-Watson and other invariant test statistics', *Journal of Econometrics* **54**, 277–300.
- Beveridge, S. et Nelson, C. (1981), 'A new approach to decomposition of economic time series into permanent and transitory components with particular attention to measurement of the 'business cycles'', *Journal of Monetary Economics* **7**, 151–174.
- Blough, S. R. (1992), 'The relationship between power and level for generic unit root tests in finite samples', *Journal of Applied Econometrics* **7**, 295–308.
- Box, G. E. P. et Jenkins, G. M. (1976), *Time Series Analysis : Forecasting and Control*, second edn, Holden-Day, San Francisco.
- Brockwell, P. J. et Davis, R. A. (1991), *Time Series : Theory and Methods*, second edn, Springer-Verlag, New York.
- Cochrane, J. H. (1991), 'A critique of the application of unit root tests', *Journal of Economic Dynamics and Control* **15**, 275–284.
- Dickey, D. A. (1976), Estimation and Testing of Non Stationary Time Series, PhD thesis, University of Iowa.
- Diebold, F. X. et Nerlove, M. (1990), Unit root in economic time series : A selective survey, in T. B. Fomby et J. Rhodes, G. F., eds, 'Advances in Econometrics : A Research Annual. Volume 8 : Cointegration, Spurious Regression, and Unit Roots', JAI Press, Greenwich, Connecticut.
- Dufour, J.-M. (1990), 'Exact tests and confidence sets in linear regressions with autocorrelated errors', *Econometrica* **58**, 475–494.
- Dufour, J.-M. (1997), 'Some impossibility theorems in econometrics, with applications to structural and dynamic models', *Econometrica* **65**, 1365–1389.
- Dufour, J.-M. et Jasiak, J. (2001), 'Finite sample limited information inference methods for structural equations and models with generated regressors', *International Economic Review* **42**, 815–843.
- Dufour, J.-M. et Kiviet, J. F. (1998), 'Exact inference methods for first-order autoregressive distributed lag models', *Econometrica* **66**, 79–104.
- Dufour, J.-M. et Torrès, O. (1998), Union-intersection and sample-split methods in econometrics with applications to SURE and MA models, in D. E. A. Giles et A. Ullah, eds, 'Handbook of Applied Economic Statistics', Marcel Dekker, New York, pp. 465–505.
- Farebrother, R. W. (1973), 'Simplified Samuelson conditions for cubic and quartic equations', *The Manchester School of Economic and Social Studies* **41**, 396–400.

- Farebrother, R. W. (1974a), 'Simplified Samuelson conditions for quintic equations', *The Manchester School of Economic and Social Studies* **42**, 279–282.
- Farebrother, R. W. (1974b), 'The stability of Laidler's simple monetary model', *The Manchester School of Economic and Social Studies* **42**, 277–278.
- Farebrother, R. W. (1974c), 'Recursive relations for the Samuelson transformation coefficients', *International Economic Review* **15**(3), 805–807.
- Farebrother, R. W. (1976), 'A note on the local stability of the general first order difference equation', *The Manchester School of Economic and Social Studies* **44**, 182–184.
- Farebrother, R. W. (1987), 'Independent conditions for the stability of a dynamic linear model', *The Manchester School of Economic and Social Studies* **55**.
- Fuller, W. A. (1976), *Introduction to Statistical Time Series*, John Wiley & Sons, New York.
- Gouriéroux, C. et Monfort, A. (1990), *Séries temporelles et modèles dynamiques*, Economica, Paris.
- Hamilton, J. D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Imhof, P. J. (1961), 'Computing the distribution of quadratic forms in normal variables', *Biometrika* **48**, 419–426.
- King, M. L. (1987), 'An alternative test for regression coefficient stability', *The Review of Economics and Statistics* **69**, 379–381.
- Lehmann, E. L. (1986), *Testing Statistical Hypotheses, 2nd edition*, John Wiley & Sons, New York.
- Miller, Jr., R. G. (1981), *Simultaneous Statistical Inference*, second edn, Springer-Verlag, New York.
- Neifar, M. (1996), Méthodes d'inférence exactes pour des modèles de régression avec erreurs auto-régressives et applications macroéconomiques, PhD thesis, Université de Montréal.
- Savin, N. E. (1984), Multiple hypothesis testing, in Z. Griliches et M. D. Intriligator, eds, 'Handbook of Econometrics, Volume 2', North-Holland, Amsterdam, chapter 14, pp. 827–879.
- Schmidt, P. (1972), 'A generalisation of the Durbin-Watson test', *Australian Economic Paper* pp. 203–209.
- Staiger, D. et Stock, J. H. (1997), 'Instrumental variables regression with weak instruments', *Econometrica* **65**, 557–586.
- Stock, J. H. (1991), 'Confidence intervals for the largest autoregressive root in U.S. macroeconomic time series', *Journal of Monetary Economics* **28**, 435–459.
- Stock, J. H. (1994), Unit root, structural breaks and trends, in R. F. Engle et D. L. McFadden, eds, 'Handbook of Econometrics, Volume IV', North-Holland, Amsterdam, chapter 46, pp. 2740–2841.
- Vinod, H. D. (1973), 'Generalisation of the Durbin-Watson statistic for higher order autoregressive processes', *Communication in Statistics, Theory and Methods* **2**, 115–144.
- Wallis, K. J. (1972), 'Testing for fourth order autocorrelation in quarterly regression equation', *Econometrica* **40**, 617–636.